Chapitre 33

Dénombrement

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, E et F désignent des ensembles **finis** (i.e. ils ne possèdent qu'un nombre fini d'éléments).

1 Cardinal d'un ensemble fini

1.1 Définition et premières propriétés

Propriété 33.1

E et F sont dits en bijection s'il existe une bijection $f : E \to F$, et on notera $E \simeq F$. Il s'agit d'une relation d'équivalence sur les ensembles.

Démonstration. Montrons que $\simeq$ est une relation d'équivalence. Soit E, F, G trois ensembles.

- $\mathrm{id}_E : E \to E$ est une bijection, donc $E \simeq E$: la relation $\simeq$ est réflexive.
- On suppose que $E \simeq F$. Alors il existe $f : E \to F$ bijective. L'application $f^{-1} : F \to E$ est alors bijective (avec $(f^{-1})^{-1} = f$) si bien que $F \simeq E$: la relation est symétrique.
- On suppose que $E \simeq F$ et $F \simeq G$. Il existe donc deux bijections $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Dans ce cas, $g \circ f : E \to G$ est aussi une bijection, d'où $E \simeq G$: la relation est transitive.

□

Définition 33.2 (Ensemble fini, infini)

On dit que E est un ensemble <u>fini</u> s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $E \simeq [\![1,n]\!]$. Dans ce cas, un tel n est unique. On l'appelle le <u>cardinal</u> de E, et on note

$$n = \operatorname{card}(E) \qquad \text{ou} \qquad n = |E|$$

Si un tel $n \in \mathbb{N}$ n'existe pas, on dit que E est un ensemble <u>infini</u>.

- L'ensemble vide est le seul ensemble avec 0 élément. Cela correspond au cas $n = 0$ de la définition.
- Si $\operatorname{card}(E) = n$, alors le fait de choisir une bijection

$$\begin{aligned} [\![1,n]\!] &\to E \\ i &\mapsto a_i \end{aligned}$$

revient à choisir une numérotation des éléments de E. On peut alors écrire $E = \{a_1, \cdots, a_n\}$.

Propriété 33.3

Si $\operatorname{card}(E) = n$ et $E \simeq F$, alors $\operatorname{card}(F) = n$.

Démonstration. On a $F \simeq E$ et $E \simeq [\![1,n]\!]$. Par transitivité, $F \simeq [\![1,n]\!]$ donc F est de cardinal n. □

Remarque. La notation $\operatorname{card}(E)$ n'a de sens que si E est de cardinal fini (tout comme $\dim F$ n'a de sens que si l'e.v. F est de dimension finie).

1.2 Opérations sur les cardinaux

Propriété 33.4 (Inclusion)

Soit E un ensemble fini et $F \subset E$. Alors F est un ensemble fini et $\operatorname{card}(F) \leq \operatorname{card}(E)$
De plus, si $\operatorname{card}(F) = \operatorname{card}(E)$, alors $F = E$.

Comme pour les s.e.v., si on veut montrer que deux ensembles finis sont égaux, il est suffisant de montrer que l'un est inclus dans l'autre et que leurs cardinaux sont égaux.

Propriété 33.5 (Union disjointe, union quelconque)

Si A, B sont deux ensembles finis et disjoints, alors

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B)$$

Plus généralement, si A, B sont deux ensembles finis, alors

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B)$$

La première formule se généralise à n ensembles $A_1, \cdots, A_n$ *disjoints deux à deux* :

$$\operatorname{card}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \operatorname{card}(A_1) + \cdots + \operatorname{card}(A_n)$$

Un dessin suffit pour se convaincre de la seconde formule :

Si A est un sous-ensemble de E, on notera $\overline{A} := E \setminus A$ son complémentaire (la notation A^c existe aussi)

Propriété 33.6 (Complémentaire, différence)

Soit E un ensemble fini et A un sous-ensemble de E. Alors $\overline{A}$ est fini et

$$\operatorname{card}(\overline{A}) = \operatorname{card}(E) - \operatorname{card}(A)$$

Plus généralement, si A, B sont des sous-ensembles de E, alors

$$\operatorname{card}(B \setminus A) = \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(B \cap A)$$

La première formule est une conséquence de la seconde car ...

Propriété 33.7 (Produit cartésien)

Soit E, F deux ensembles finis. Alors $E \times F$ est fini et

$$\operatorname{card}(E \times F) = \operatorname{card}(E) \times \operatorname{card}(F)$$

C'est ce qui explique la notation $E \times F$: en effet $|E \times F| = |E| \times |F|$. Plus généralement, si $p \in \mathbb{N}$, alors

$$\operatorname{card}(E^p) = \operatorname{card}(E)^p$$

Rappel : si E, F sont deux ensembles, alors on note $F^E := \mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F.

Propriété 33.8 ("Puissance")

Soit E, F deux ensembles finis. Alors F^E est fini et

$$\operatorname{card}(F^E) = \operatorname{card}(F)^{\operatorname{card}(E)}$$

C'est ce qui explique la notation F^E : en effet $\left|F^E\right| = |F|^{|E|}$. Attention à l'ordre ! En général :

$$|F|^{|E|} \neq |E|^{|F|}$$

Par exemple $2^3 = 8$ mais $3^2 = 9$.

Propriété 33.9 ($\mathcal{P}(E)$)

Soit E un ensemble de cardinal fini. Alors $\mathcal{P}(E)$ est de cardinal fini et

$$\operatorname{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\operatorname{card}(E)}$$

Démonstration. On pose $n = \operatorname{card}(E)$. Si $n = 0$, alors $E = \varnothing$ et donc $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing\}$ est bien de cardinal $2^0 = 1$.

Si $n \geq 1$, déterminer une partie $A \subset E$ revient à choisir, pour chaque élément de E, s'il est dans A ou non. Cela représente deux choix par élément de E. Comme il y en a n, cela donne 2^n possibilités. Donc $\operatorname{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$. □

1.3 Cardinal de $f(E)$

Lemme 33.10

Soit $f : E \to F$ une application. Alors $\operatorname{card}(f(E)) \leq \operatorname{card}(E)$

De plus, f est injective si et seulement si $\operatorname{card}(f(E)) = \operatorname{card}(E)$.

Démonstration. On pose $n = \operatorname{card}(E)$ et $E := \{a_1, \cdots, a_n\}$. Alors par définition

$$f(E) = \{f(a_1), f(a_2), \cdots, f(a_n)\}$$

et cet ensemble contient au plus n éléments (mais éventuellement moins si par exemple $f(a_1) = f(a_2)$). D'où le résultat. Pour la seconde assertion, on procède par double implication.

- Pour le sens réciproque, on passe par la contraposée : on va montrer que si f n'est pas injective, alors $\operatorname{card}(f(E)) < \operatorname{card}(E)$. Comme f n'est pas injective, il existe deux éléments de E qui ont la même image par f. Quitte à renuméroter les $a_1, \cdots, a_n$, on peut supposer que ce sont a_1 et a_2, de sorte que $f(a_1) = f(a_2)$. Alors :
$$f(E) = \{f(a_1), f(a_2), \cdots, f(a_n)\} = \{f(a_2), \cdots, f(a_n)\}$$
Or, l'ensemble $\{f(a_2), \cdots, f(a_n)\}$ contient au plus $n-1$ éléments, donc
$$\operatorname{card}(f(E)) \leq n-1 \quad < \quad n = \operatorname{card}(E)$$
D'où le résultat
- Sens direct : on définit l'application
$$\varphi : E \to f(E)$$
$$x \mapsto f(x)$$
φ est surjective par construction. Si f est injective, alors φ aussi, si bien que φ est bijective. Ainsi E et $f(E)$ sont en bijection, donc ont même cardinal.

□

Propriété 33.11

On suppose que $\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(F)$. Soit $f : E \to F$ une application. Alors

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective}$$

Démonstration. On affirme que :

$$f \text{ est injective} \quad \text{ssi} \quad f(E) = F \quad \text{ssi} \quad f \text{ est surjective}$$

La première équivalence découle du lemme qui précède, tandis que la seconde a été vue au chapitre 4. L'affirmation ci-dessus est donc vraie. Le reste de la preuve s'en déduit trivialement. □

2 Arrangements

Rappel : étant donné $p \in \mathbb{N}^*$, on appelle p-uplet (ou p-liste) de E un élément de E^p, qui sera donc une famille de la forme $(a_1, a_2, \cdots, a_p)$ avec $a_1, \cdots, a_p \in E$. L'ordre compte :

$$(a_1, a_2, \cdots, a_p) \neq (a_2, a_1, \cdots, a_p)$$

Propriété 33.12 (Nombre de p-uplets)

Si E est de cardinal n, alors il y a exactement $\quad \mathrm{card}(E^p) = n^p \quad$ p-uplets de E

Définition 33.13 (p-arrangement)

Soit $p \in [\![1, \mathrm{card}(E)]\!]$. On appelle p-arrangement un p-uplet $(a_1, a_2, \cdots, a_p)$ de E où tous les éléments $a_1, \cdots, a_p$ sont distincts.

Exemple 1. $(1, 5, 2)$ est un 3-arrangement de $[\![1, 10]\!]$ mais $(3, 6, 5, 3)$ n'est pas un (4-)arrangement.

On peut étendre cette définition au cas $p = 0$: on considère que le seul 0-arrangement de E est la famille vide.

Théorème 33.14

On suppose E de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in [\![0, n]\!]$. Le nombre de p-arrangements de E est donné par

$$A_n^p := \frac{n!}{(n-p)!} \quad = \quad n(n-1)\dots(n-p+1)$$

Le cas $p = 0$ résulte de la convention ci-dessus : $A_n^0 = 1$ et il y a bien un seul 0-arrangment de E (la famille vide).

Preuve "avec des cases". Le cas $p = 0$ étant traité, on considère que $p \geq 1$. Un p-arrangement correspond à un remplissage de p cases par des éléments de E (de cardinal n), tous distincts :

$$\overset{\text{case } 1}{\underbrace{\boxed{}}_{n \text{ choix possibles}}} \qquad \overset{\text{case } 2}{\underbrace{\boxed{}}_{n-1 \text{ choix possibles}}} \qquad \overset{\text{case } 3}{\underbrace{\boxed{}}_{n-2 \text{ choix possibles}}} \qquad \cdots \qquad \overset{\text{case } p}{\underbrace{\boxed{}}_{n-p+1 \text{ choix possibles}}}$$

Au total, on a donc

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)$$

choix possibles. D'où le résultat. $\square$

Rappelons que f est une permutation de E si f est une bijection de E dans E.

Corollaire 33.15 (Cardinal de $S(E)$)

Si $\text{card}(E) = n$, il y a $n!$ permutations de E, càd

$$\text{card}(S(E)) = n!$$

En particulier, si $E = [\![1,n]\!]$, on démontre que $S(E) = S_n$ possède $n!$ éléments.

Preuve "avec des cases". On pose $E = \{a_1, \cdots, a_n\}$. Une permutation f de E est entièrement déterminée par la famille

$$(f(a_1), \cdots, f(a_n))$$

Hors, f étant une bijection, cette famille est constituée de n éléments distincts de E. On a ainsi n cases à remplir avec les choix suivants :

$$\overset{\text{case } f(a_1)}{\underbrace{\boxed{\quad}}_{n \text{ choix possibles}}} \qquad \overset{\text{case } f(a_2)}{\underbrace{\boxed{\quad}}_{n-1 \text{ choix possibles}}} \qquad \overset{\text{case } f(a_3)}{\underbrace{\boxed{\quad}}_{n-2 \text{ choix possibles}}} \qquad \cdots \qquad \overset{\text{case } f(a_n)}{\underbrace{\boxed{\quad}}_{1 \text{ choix possible}}}$$

Il y a donc $n(n-1)(n-2)\cdots 1$ choix possibles, càd $n!$. $\square$

Une autre preuve s'appuie sur le fait que tout n-arrangement de E est associé à une et une seule permutation de E : on a donc $A_n^n = n!$ permutations de E.

3 Combinaisons

Rappel : soit $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$. Alors on définit le coefficient binomial :

$$\binom{n}{p} := \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{1}{p!} A_n^p$$

Définition 33.16

On suppose E de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in [\![0,n]\!]$. On appelle p-combinaison de E tout sous-ensemble de E avec p éléments (nécessairement distincts).

Exemple 2. Les éléments d'une p-combinaison doivent être distincts, et l'ordre ne compte pas :

- $\{1,2\} = \{2,1\}$ représente la même 2-combinaison.
- $\{1,2,3\} = \{3,1,2\} = \{3,2,1\}$ représente la même 3-combinaison.

- Plus généralement, si $\{a_1, \cdots, a_p\}$ est une p-combinaison, pour tout $\sigma \in S_p$, on a

$$\{a_1, \cdots, a_p\} = \{a_{\sigma(1)}, \cdots, a_{\sigma(p)}\}$$

Il y a donc $p!$ façons d'écrire $\{a_1, \cdots, a_p\}$ en changeant l'ordre (mais cela reste la même p-combinaison).

Théorème 33.17

On suppose E de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in [\![0, n]\!]$. Il y a exactement $\binom{n}{p}$ p-combinaisons de E.

Démonstration. On a montré qu'il y a un total de A_n^p p-arrangements de E. De plus, à chaque p-arrangement, on peut lui associer une et une seule p-combinaison avec l'application

$$\Psi : (a_1, \cdots, a_p) \mapsto \{a_1, \cdots, a_p\}$$

Cette application est surjective, mais pas injective (si $p \geq 2$) : pour une p-combinaison donnée il y a $p!$ antécédents par Ψ (cf exemple ci-dessus).
Ainsi, le nombre d'images (distinctes) de Ψ s'obtient en divisant le nombre de p-arrangements par $p!$, càd

$$\frac{1}{p!}A_n^p = \binom{n}{p}$$

□

Propriété 33.18 (Formules classiques du binôme)

Soit $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$. Alors

$$\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$$

et si de plus $p \leq n-1$,

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

4 Bilan et techniques

$\text{card}(E) = n$	Avec répétition ?	L'ordre compte ?	Valeurs pour p	Valeur
p-uplet (ou p-liste)	Oui	Oui	$p \geq 0$	n^p
p-arrangement A_n^p	Non	Oui	$0 \leq p \leq n$	$\frac{n!}{(n-p)!}$
p-combinaison $\binom{n}{p}$	Non	Non	$0 \leq p \leq n$	$\frac{n!}{p!(n-p)!}$

On présente enfin un certain nombre de techniques (avec exemples) de calcul de dénombrement.

Méthode (Dénombrement de choix indépendants)

Si on doit dénombrer des choix qui sont *indépendants* les uns des autres (donc avec répétition), il suffit de multiplier le nombre de possibilités de chaque choix.
On peut de manière équivalente, raisonner sur des cases en s'autorisant la répétition.

Exemple 3. Un immeuble dispose d'un code d'entrée à quatre chiffres. Combien y a-t-il de combinaisons possibles ?

Remarque. Chaque chiffre étant dans $E = [\![0,9]\!]$, un code à 4 chiffres correspond à un 4-uplet de E : comme $\text{card}(E) = 10$, on a donc bien 10^4 4-uplets de E.

Exemple 4. Combien y a-t-il de codes avec uniquement des chiffres pairs ?

Méthode (Dénombrement de choix dépendants)

Si les choix à faire sont *dépendants* les uns des autres, beaucoup de cas sont possibles. Deux cas sont très simples :

1. S'il s'agit d'un choix avec ordre, sans répétition, on utilise des arrangements. On peut également utiliser des cases dans ce cas.
2. S'il s'agit d'un choix sans ordre, sans répétition, on utilise des combinaisons.

Exemple 5. 1) On considère une classe de 25 élèves, qui souhaite élire un comité de 3 représentants. Combien de comités peut-on faire ?
2) On suppose maintenant qu'un comité est constitué d'un président, d'un trésorier et d'un secrétaire général. Combien de comités peut-on faire ?

Méthode

Diverses techniques peuvent également être employées / conjuguées aux précédentes :

- "Passer au complémentaire" : on dénombre d'abord tous les cas qui ne peuvent pas se produire et on en déduit ceux que l'on veut dénombrer ensuite.
- Disjonction de cas : si on peut diviser un dénombrement en plusieurs cas mutuellement exclusifs, on peut dénombrer chaque cas séparément, puis faire la somme.
- Lorsqu'il n'y a pas d'ordre a priori, on peut se fixer un "ordre implicite", cf exemple 7.

Exemple 6. Combien y a-t-il de codes à 4 chiffres avec au moins une fois le chiffre 7 ?

Exemple 7. Avec un jeu de 52 cartes, on distribue des mains de 5 cartes.

1. Combien de mains peut-on avoir ?
2. Combien d'entre elles ont exactement 3 cartes de même valeur ?

1.

2. On créé un ordre implicite : on place d'abord les 3 cartes qui constituent le brelan en tête de la main, puis les 2 autres cartes (dont le choix dépend du brelan comme on le verra).

$$\underbrace{\overset{\text{brelan}}{\boxed{}}}_{\dots\text{ choix possibles}} \qquad \underbrace{\overset{\text{les 2 autres cartes}}{\boxed{}}}_{\dots\text{ choix possibles}}$$

   - Pour trouver le nombre à mettre dans la première case :
     - La valeur du brelan laisse 13 choix possibles.
     - Ensuite il faut choisir 3 cartes de cette valeur parmi 4.

     Donc il y a un total de $13 \times \dbinom{4}{3} = 52$ choix possibles pour le brelan.
   - Enfin, les deux autres cartes sont quelconques, à choisir parmi 48 cartes restantes (on ne peut pas choisir parmi les 4 cartes de la valeur du brelan). Ainsi, on a $\dbinom{48}{2}$ possibilités.
   - Finalement, on obtient

$$52 \times \binom{48}{2}$$

     possibilités. Alternativement, on peut créer un ordre implicite un peu différent :

$$\underbrace{\overset{\text{valeur du brelan}}{\boxed{}}}_{13\text{ choix possibles}} \qquad \underbrace{\overset{\text{cartes du brelan}}{\boxed{}}}_{\binom{4}{3}\text{ choix possibles}} \qquad \underbrace{\overset{\text{les 2 autres cartes}}{\boxed{}}}_{\binom{48}{2}\text{ choix possibles}}$$